Ex 41

Rappel • Comment calculer conjugaison ?

Ex : • $\sigma = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 3&1&2&5&4 \end{pmatrix}$

$\tau = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 5&3&2&1&4 \end{pmatrix}$

$$\sigma\tau := \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ \sigma(5)&\sigma(3)&\sigma(2)&\sigma(1)&\sigma(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 4&2&1&3&5 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1)&\sigma(2)&\sigma(3)&\sigma(4)&\sigma(5) \\ \sigma(5)&\sigma(3)&\sigma(2)&\sigma(1)&\sigma(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3&1&2&5&4 \\ 4&2&1&3&5 \end{pmatrix}.$$

En fait, $\left(\sigma\tau\sigma^{-1}\right)\left(\sigma(i)\right) = \sigma\left(\tau(i)\right)$ $\quad = (345)(12)$.

• c'est plus facile à appliquer si τ est écrit comme produit de cycles disjoints.

On voit que $\tau = (154)(23)$

$$\Rightarrow \sigma\tau\sigma^{-1} = \left(\sigma(1)\,\sigma(5)\,\sigma(4)\right)\left(\sigma(2)\,\sigma(3)\right)$$

$$= (345)(12)$$

Conséquences/Cor Deux éléments de $\mathfrak{S}_n$ sont conjugués $\Longleftrightarrow$ ils ont même structure de cycles disjoints.

Exemple Dans $\mathfrak{S}_{10}$

• $(12)(345)(6789)$ est conjugué à $(34)(765)(1289)$

• $\sigma_1 = (12)(34)(567)$ est ———— $\sigma_2 = (56)(78)(123)$

En effet $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ on a $\sigma\sigma_1\sigma^{-1} = \sigma_2$

• $(12)(345)$ n'est pas conjugué à $(78)(1234)$

__Cor__ le nombre des classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$

$=$ le nombre des __partitions__ de n $=: P(n)$

__Déf__: Une __partition__ d'un nombre $n \in \mathbb{N}_{>0}$

est une suite décroissante $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_\ell (\geq 1)$

tq $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\ell = n$.

__Exemples__ Pour $n=5$ $p(5) = 7$

Partitions	Donc il y a 7 classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_5$	Représentant
$5 = 5$	5-cycle	(12345)
$= 4+1$	4-cycle	(1234)
$= 3+1+1$	3-cycle	(123)
$= 3+2$	3-cycle + 2-cycle	$(123)(45)$
$= 2+2+1$	$2 \times$ (2-cycles)	$(12)(34)$
$= 2+1+1+1$	2-cycle	(12)
$= 1+1+1+1+1$	id	id.

Question Combien de classes de conj. dans $\mathfrak{S}_n$?

($\Leftrightarrow$ $p(n) = ?$)

On n'a pas une formule "compacte".

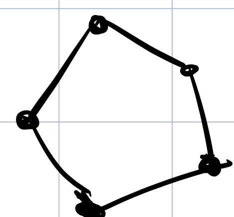
Voir Ex24 : $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) T^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + T^k + T^{2k} + T^{3k} - - - -)$

(par convention $p(0)=1$) $= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-T^k}$.

Ex 62

Déf (groupe dihédral) D_{2n} $|D_{2n}| = 2n$.

D_{2n} := le groupe des symétrie de n-gon régulier



D_{10}

$$D_{2n} := \left\langle r, s \;\middle|\; \begin{array}{l} r^n = id \\ s^2 = id \\ srs = r^{-1} \end{array} \right\rangle$$

$$= C_n \rtimes C_2$$

C_n := gp cyclique d'ordre n $= \langle r \rangle$

C_2 := gp cyclique d'ordre 2 $= \langle s \rangle$

Exo. $\begin{cases} C_n \triangleleft D_{2n} \\ C_n \cap C_2 = \{id\} \\ C_n \cdot C_2 = D_{2n} \end{cases}$

Exo : Expliciter l'action de G_2 sur G_n.

2-Sylow de $\mathfrak{S}_4$

$$H_1 = \langle \underset{\underset{s}{\|}}{(12)(34)}, \underset{\underset{r}{\|}}{(1234)} \rangle \qquad \begin{pmatrix} r^4 = id \\ s^2 = id \\ srs = r^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\simeq D_8$$

Ex 63

Rappel . $|\mathfrak{S}_n| = n!$

. $v_p(n!) = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + \cdots$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$$

Exemple . $v_p(p!) = 1$

. $k < p$, $v_p((kp)!) = \lfloor \frac{kp}{p} \rfloor + \underbrace{\lfloor \frac{k}{p} \rfloor}_{0} = k$

. $v_p((p^2)!) = \lfloor \frac{p^2}{p} \rfloor + \lfloor \frac{p^2}{p^2} \rfloor = p+1$.

Donc

- Un p-Sylow de $\mathfrak{S}_p$ est d'ordre p.
- ——— $\mathfrak{S}_{kp}$ ——— p^k
  $(k<p)$
- ——— $\mathfrak{S}_{p^2}$ ——— p^{p+1}

- **Pour $\mathfrak{S}_p$:**

On considère $H = \langle (1 2 \cdots p) \rangle \simeq C_p$ est un p-Sylow de $\mathfrak{S}_p$

$\Rightarrow$ les p-Sylow de $\mathfrak{S}_p$ sont

$$\langle (\sigma(1)\, \sigma(2) \cdots \sigma(p)) \rangle \quad \text{pour} \quad \sigma \in \mathfrak{S}_p .$$

- **Pour $\mathfrak{S}_{kp}$** $(k<p)$ On divise $1, \ldots, kp$ en k blocs de cardinal p

$$\underbrace{1 \cdots p}_{B_1},\ \underbrace{p+1, \cdots, 2p}_{B_2},\ \ldots,\ \underbrace{(k-1)p+1, \cdots, kp}_{B_k}$$

On considère

$$H = \langle (1 \cdots p), (p+1 \cdots 2p), \ldots, ((k-1)p+1 \cdots kp) \rangle$$

$$\simeq \underbrace{C_p \times \cdots \times C_p}_{k}$$

$\Longrightarrow \quad |H| = p^k$, Donc H est un p-Sylow de $\mathfrak{S}_{kp}$

Les p-Sylow de $\mathfrak{S}_{kp}$ sont

$$H = \langle (\sigma(1) \dots \sigma(p)), \dots, (\sigma((k-1)p+1), \dots, \sigma(kp)) \rangle .$$

- <u>Pour $\mathfrak{S}_{p^2}$</u> :

On divise $1, \dots, p^2$ en p blocs disjoints de cardinal p

$$\sigma \qquad \underbrace{1 \dots p}_{B_1}, \quad \underbrace{p+1, \dots, 2p}_{B_2}, \quad \dots, \quad \underbrace{p(p-1)+1, \dots, p^2}_{B_p}$$

On considère

$$H = \langle \underbrace{\overset{\sigma_1}{\overset{\shortparallel}{(1 \dots p)}}, \overset{\sigma_2}{\overset{\shortparallel}{(p+1, \dots, 2p)}}, \dots, \overset{\sigma_p}{\overset{\shortparallel}{(p(p-1)+1, \dots, p^2)}}}_{\underbrace{C_p \times \dots \times C_p}_{p}}, \quad \sigma \rangle$$

où $\sigma(i) = p + i \pmod{p^2}$

<u>Rq</u> $\sigma^p = id$.

$$H = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_p \rangle \rtimes \langle \sigma \rangle \simeq \underbrace{(C_p \times \dots \times C_p)}_{p} \rtimes C_p$$

$$\begin{array}{cc} \cup & \cup \\ \underbrace{C_p\times\cdots\times C_p}_{p} & C_p \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad |H| = p^p \times p = p^{p+1}$$

donc H est un p-Sylow de $\mathfrak{S}_{p^2}$.

Exo : Décrire l'action de $\langle \sigma \rangle$ sur $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_p \rangle$.

Digression (wreath product / produit en couronne)

Soit G un groupe, $n \in \mathbb{N}_{>0}$

Soit $H < \mathfrak{S}_n$

On définit $G \wr H := (\underbrace{G \times \cdots \times G}_{n \text{ fois}}) \rtimes H$

où l'action de H sur $\underbrace{G \times \cdots \times G}_{n}$ est donnée par permutation.

- $|G \wr H| = |G^n| \cdot |H| = |G|^n |H|$

Exemple. $H = \mathfrak{S}_n$

$$G \wr \mathfrak{S}_n = (\underbrace{G \times \cdots \times G}_{n}) \rtimes \mathfrak{S}_n = \left\{ ((g_1, \dots, g_n), \sigma) \;\middle|\; \begin{array}{l} g_i \in G \\ \sigma \in \mathfrak{S}_n \end{array} \right\}$$

avec la loi

$$((g_1, \dots, g_n), \sigma) \cdot ((g_1', \dots, g_n'), \sigma')$$
$$= ((g_1, \dots, g_n) \cdot {}^{\sigma}(g_1', \dots, g_n'), \sigma\sigma').$$

$$= \left(\left(g_1 g'_{\sigma(1)}, \dots, g_n g'_{\sigma(n)} \right), \sigma\sigma' \right)$$

- $H = C_n < \mathfrak{S}_n$

$G \wr C_n$, $|G \wr C_n| = |G|^n \cdot n$

L'exemple de p-Sylow dans $\mathfrak{S}_{p^2}$ est donc isom à :

$$C_p \wr C_p .$$

$$|C_p \wr C_p| = p^p \cdot p = p^{p+1} .$$

Ex 64 .

- <u>p-Sylow de $\mathfrak{S}_{p^k}$</u> :

$$v_p\left((p^k)! \right) = \left\lfloor \frac{p^k}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p^k}{p^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{p^k}{p^k} \right\rfloor$$

$$= p^{k-1} + p^{k-2} + \dots + 1 = \frac{p^k - 1}{p-1} .$$

Donc un p-Sylow de $\mathfrak{S}_{p^k}$ est d'ordre $p^{\frac{p^k-1}{p-1}}$

Indication :

$$\underbrace{C_p \wr C_p \wr C_p \cdots \wr C_p}_{k \text{ fois}} = p^{\frac{p^k-1}{p-1}}.$$

Exo : Construire un p-Sylow de $\mathfrak{S}_{p^k}$ isom à $\underbrace{C_p \wr \cdots \wr C_p}_{p}$.

Indication : Penser $1, \ldots, p^k$ comme $(\mathbb{F}_p)^k$.

- Pour n général, utiliser expansion p-adiq de n :

$$n = \sum_{k=0}^{m} b_k p^k \quad (0 \leq b_k \leq p-1).$$